PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée, documents interdits.

Toute réponse doit être proprement justifiée, de manière aussi concise que possible. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction. Les trois exercices sont indépendants. Chaque question peut être admise pour résoudre la suivante.

Exercice 1 : Intégration

Calculez les intégrales suivantes :

1. $\int_{-\theta}^{\theta} \frac{x}{\cos(x)} dx$ *avec* $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ *;*
2. $\int_0^{\pi} x \sin(x) dx$ *;*
3. $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}$ *(on pourra utiliser un changement de variable).*

Exercice 2 : Diagonalisation et exponentielle d'une matrice

Soit $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ ayant pour matrice, relativement à la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que

$$exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

1. *Sous quelles conditions* f *est-il diagonalisable ?*
2. *Sous ces condiditions, déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres associés.*
3. *Sous ces conditions, diagonalisez* f*. Quelle est la matrice de passage* P *?*
4. *On note* $D = P^{-1}MP$*. Montrez que* $\exp(M) = P\exp(D)P^{-1}$*.*
5. *Calculez* D^2*,* D^3 *puis* D^k *pour* $k \geq 1$ *(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence).*
6. *Calculez* $\exp(M)$*.*

Exercice 3 : Nombres complexes et arithmétique

DEFINITIONS ET NOTATIONS

On rappelle que les entiers de Gauss sont les nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont des nombres entiers relatifs. On note $\mathcal{G}$ leur ensemble :

$$\mathcal{G} = \{a + ib \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$$

Pour éviter des ambiguïtés gênantes, les entiers $n \in \mathbb{Z}$ seront parfois appelés les entiers **ordinaires**.

La **norme** $N(z)$ d'un entier de Gauss $z = a + ib$ est définie comme étant le carré de son module : $N(z) = N(a+ib) = a^2 + b^2$. Il s'agit d'un entier (ordinaire) positif ou nul. On a ainsi une application $N : \mathcal{G} \to \mathbb{N}$, qui est multiplicative, au sens où $N(zz') = N(z)N(z')$.

Les **inversibles** de $\mathcal{G}$ sont, par définition, les éléments $z \in \mathcal{G}$ pour lesquels il existe un $z' \in \mathcal{G}$ vérifiant $zz' = 1$. Un entier de Gauss z est dit **premier dans** $\mathcal{G}$, ou encore **$\mathcal{G}$-premier**, si tout entier de Gauss qui divise z est soit un inversible, soit le produit de z par un inversible.

LE PROBLÈME

On s'intéresse au problème suivant : trouver toutes les solutions entières $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ de l'équation

$$y^3 = x^2 + 1.$$

Remarque : Ce n'est pas tant *cette* équation qui nous intéresse, que la méthode de sa résolution. On pourrait, par la même technique, résoudre les équations $y^3 = x^2 + 2$, $y^3 = x^2 + 3$, trouver les entiers qui sont somme de deux carrés (problème des deux carrés), etc.

Idée de la résolution : L'observation de base est que $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$. L'équation à résoudre est ainsi $y^3 = (x+i)(x-i)$. Le membre de gauche est un cube. A quelle condition le terme de droite, un produit de deux nombres, peut-il être un cube ? Si ces deux nombres sont premiers entre eux, alors chacun d'eux doit sûrement lui-même être un cube. Quels sont les entiers de Gauss dont le cube est du type $x + i$ ou $x - i$? Ce sont les questions auxquelles on tente de répondre dans la partie 3. Auparavant, la partie 1 étudie quelques propriétés simples des entiers de Gauss $\mathcal{G}$-premiers, et la partie 2 s'intéresse à la décomposition en facteurs premiers dans $\mathcal{G}$.

PARTIE 1 QUELQUES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

La norme est un outil bien utile, en particulier pour caractériser les inversibles de $\mathcal{G}$.

Question 1 *Montrez que les entiers de Gauss inversibles dans $\mathcal{G}$ sont exactement ceux dont la norme vaut* 1.

Question 2
1. *Trouvez des entiers de Gauss (au moins deux) dont la norme est un nombre premier ordinaire.*
2. *Montrez qu'un entier de Gauss dont la norme est un nombre premier ordinaire, est nécessairement $\mathcal{G}$-premier.*

Question 3 *Trouvez des nombres premiers ordinaires (au moins deux) qui ne sont pas $\mathcal{G}$-premiers.*

Question 4 1. *Soit p un nombre premier ordinaire qui est somme de deux carrés : $p = a^2 + b^2$. Est-il ou non premier dans $\mathcal{G}$? Si oui pourquoi ? Si non pouvez-vous l'exprimer comme produit d'entiers de Gauss $\mathcal{G}$-premiers ?*

2. *Réciproquement, montrez que si p est un nombre premier ordinaire qui n'est pas premier dans $\mathcal{G}$, alors il est somme de deux carrés.*

PARTIE 2 DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS DANS $\mathcal{G}$

Question 5 *Soit z un entier de Gauss qui n'est pas un inversible.*

1. *Montrez qu'il existe un entier de Gauss $\mathcal{G}$-premier qui le divise.*
2. *Déduisez-en que z peut s'écrire comme produit d'entiers de Gauss $\mathcal{G}$-premiers.*

Pour obtenir l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans $\mathbb{N}$, la division euclidienne est l'outil fondamental, via le lemme de Gauss... D'où l'idée d'essayer d'en construire une qui lui ressemble dans $\mathcal{G}$.

Question 6 *Si z et w sont deux entiers de Gauss avec $w \neq 0$, montrez qu'il existe deux entiers de Gauss q et r, tels que $z = wq + r$ et $0 \leq N(r) < N(w)$. Question subsidiaire : q et r sont-ils uniques ?*

INDICATION : Dans le plan complexe, représentez un entier de Gauss w ; puis représentez iw, $-iw$, $-w$, $(1+i)w$, $(1-i)w$, etc. A quoi ressemble finalement l'ensemble de tous les wq, où q décrit $\mathcal{G}$? Maintenant, si $z \in \mathcal{G}$ est un point quelconque, quel q et quel r allez-vous choisir pour que $z = wq + r$ et qu'en même temps $0 \leq N(r) < N(w)$?

Comme dans $\mathbb{N}$, on peut dire que deux entiers de Gauss **sont premiers entre eux** dans $\mathcal{G}$ s'ils n'ont **pas de diviseurs communs autres que les inversibles** de $\mathcal{G}$, ceux qui divisent tout autre nombre.

Question 7 (Bezout) *On admet que si deux entiers de Gauss z et w sont premiers entre eux dans $\mathcal{G}$, alors il existe $u, v \in \mathcal{G}$ tels que $uz + vw = 1$. Est-ce réciproque ?*

Question 8 *Soient $a, b \in \mathcal{G}$. Montrez que si $z \in \mathcal{G}$ est G-premier et divise le produit ab, alors z divise a ou z divise b.*

Question 9 *En utilisant l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans $\mathcal{G}$ (à la* ***multiplication par un inversible près****), montrez que si $a, b, c \in \mathcal{G}$ vérifient $ab = c^3$, avec a et b premiers entre eux (dans $\mathcal{G}$), alors a et b sont des cubes dans $\mathcal{G}$.*

PARTIE 3 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $y^3 = x^2 + 1$.

Soient x et y deux entiers ordinaires vérifiant $y^3 = x^2 + 1$.

Question 10 *Que pouvez-vous dire sur la parité de x ?*

Question 11 *Montrez que $x + i$ et $x - i$ sont premiers entre eux dans $\mathcal{G}$.*

Question 12 *Déduisez-en que $x + i$ et $x - i$ sont tous deux des cubes dans $\mathcal{G}$, i.e. qu'il existe $z, w \in \mathcal{G}$ tels que $z^3 = x + i$ et $w^3 = x - i$.*

Question 13 *Déduisez-en toutes les solutions entières x, y de l'équation $y^3 = x^2 + 1$.*